# Geometria e algebra lineare (II parte)

Bruno Martelli

Dipartimento di Matematica, Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa, Italy
*E-mail address*: `martelli at dm dot unipi dot it`

*versione: 7 marzo 2017*

# Indice

# Introduzione

Il testo è rilasciato con la licenza *Creative Commons*-BY-NC-SA[1]. Le figure sono tutte di pubblico dominio, eccetto le seguenti, che hanno una licenza CC-BY-SA[2] e sono state scaricate da Wikimedia Commons:

- Figura **??** (regola della mano destra), creata da Acdx.

[1]È possibile distribuire, modificare, creare opere derivate dall'originale, ma non a scopi commerciali, a condizione che venga riconosciuta la paternità dell'opera all'autore e che alla nuova opera vengano attribuite le stesse licenze dell'originale (quindi ad ogni derivato non sarà permesso l'uso commerciale).

[2]Come la licenza precedente, ma con anche la possibilita di uso commerciale.

CAPITOLO 1

# Autovettori e autovalori

## 1.1. Introduzione

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$. Fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $V$, possiamo descrivere $T$ concretamente come una matrice quadrata $A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. In questo capitolo studiamo questo problema: esiste una base $\mathcal{B}$ migliore delle altre, che produca una matrice $A$ particolarmente semplice?

Ad esempio, se $A$ fosse una matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

otterremmo una descrizione soddisfacente di $T$. Se $A$ fosse diagonale, il prodotto riga per colonna si semplificherebbe molto:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}.$$

L'osservazione geometrica fondamentale è che spiegheremo fra poche righe è la seguente: se $A$ è diagonale, allora la trasformazione $T$ manda ogni vettore $v_i$ della base $\mathcal{B}$ in un multiplo $\lambda_i v_i$ di se stesso. La retta $r_i = \text{Span}(v_i)$ è *invariante*, cioè

$$T(r_i) \subset r_i.$$

Le rette $r_1, \ldots, r_n$ formano quindi degli "assi" per $T$. L'endomorfismo $T$ agisce su ciascuna retta $r_i$ ampliandola (se $\lambda_i > 1$), lasciando fissi tutti i punti (se $\lambda_i = 1$), contraendola (se $0 < \lambda_i < 1$), collassandola tutta nell'origine (se $\lambda_i = 0$), o ribaltandola (se $\lambda_i < 0$). L'endomorfismo $T$ può agire in modi diversi su assi diversi.

Ci sono altri motivi per preferire le matrici diagonali come la $A$ descritta sopra. Intanto il determinante di $A$ si calcola semplicemente come

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Inoltre il prodotto di due matrici diagonali è semplicissimo da calcolare:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

Possiamo ad esempio calcolare facilmente potenze come $A^{100}$ che indicano geometricamente che la trasformazione $T$ viene iterata 100 volte.

Diciamo che un endomorfismo $T$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ per cui $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia diagonale. Lo scopo di questo capitolo è rispondere alle seguenti domande: come facciamo a capire se $T$ è diagonalizzabile? Come possiamo trovare una base $\mathcal{B}$ che diagonalizzi $T$, se esiste?

Per rispondere dovremo introdurre un po' di definizioni.

## 1.2. Autovettori, autovalori e diagonalizzabilità

**1.2.1. Autovettori e autovalori.** Sia come sempre $T: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale $V$ definito su un campo $\mathbb{K}$. Un *autovettore* è un vettore $v \neq 0$ in $V$ per cui

$$f(v) = \lambda v$$

per qualche numero $\lambda \in \mathbb{K}$ che chiameremo *autovalore*. Notiamo che $\lambda$ può essere qualsiasi scalare, anche zero. Introduciamo adesso una definizione importante.

Definizione 1.2.1. Un endomorfismo $T: V \to V$ è *diagonalizzabile* se $V$ ha una base $v_1, \dots, v_n$ composta da autovettori per $T$.

Questa definizione è effettivamente equivalente a quella data nell'introduzione, in virtù del fatto seguente. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$.

Proposizione 1.2.2. *La matrice $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale se e solo se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono tutti autovettori.*

Dimostrazione. Il vettore $v_i$ è un autovettore $\iff f(v_i) = \lambda_i v_i$. Le coordinate di $\lambda_i v_i$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $v_i$ è un autovettore se e solo se la $i$-esima colonna di $A$ è un vettore di questo tipo. La matrice $A$ è diagonale precisamente quando questo accade per ogni $i$. $\square$

Abbiamo quindi scoperto che un endomorfismo $T$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base $\mathcal{B}$ tale che $A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia una matrice diagonale, come accennato nell'introduzione a questo capitolo.

Esempio 1.2.3. L'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile: una base di autovettori è data da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Infatti otteniamo $Av_1 = 2v_1$ e $Av_2 = -2v_2$, quindi $v_1$ e $v_2$ sono autovettori, con autovalori rispettivamente 2 e $-2$. Prendendo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ otteniamo

$$[L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.2.4. Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali $2 \times 2$. L'endomorfismo $T \colon M(2) \to M(2)$ definito da $T(A) = {}^tA$ è diagonalizzabile: una base di autovettori è data da

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti otteniamo

$$T(A_1) = A_1, \qquad T(A_2) = A_2, \qquad T(A_3) = A_3, \qquad T(A_4) = -A_4.$$

Prendendo $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ otteniamo

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Negli esempi precedenti, gli autovettori sono già dati e dobbiamo solo verificare che funzionino. In generale, come troviamo gli autovettori di un endomorfismo $T$? Introduciamo uno strumento che sarà cruciale per rispondere a questa domanda.

**1.2.2. Polinomio caratteristico.** Il *polinomio caratteristico* di una matrice quadrata $A$ è definito nel modo seguente:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Un commento sulla notazione: normalmente un polinomio viene indicato con il simbolo $p(x)$, in cui $x$ rappresenta la variabile; qui a volte usiamo $\lambda$ invece di $x$, per un motivo che sarà chiaro in seguito. Il pedice $A$ in $p_A$ indica semplicemente che il polinomio dipende dalla matrice $A$.

Da questa definizione un po' oscura di $p_A(\lambda)$ non risulta affatto chiaro che questo oggetto sia realmente un polinomio. Dimostriamo adesso che è un polinomio e identifichiamo alcuni dei suoi coefficienti. Sia $n$ come di consueto la dimensione di $V$ e quindi la taglia di $A$.

Proposizione 1.2.5. *Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è effettivamente un polinomio. Ha grado $n$ e quindi è della forma*

$$p_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

*Possiamo identificare alcuni dei suoi coefficienti:*

- $a_n = (-1)^n$,
- $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}A$,
- $a_0 = \det A$.

Dimostrazione. Dimostreremo la proposizione per induzione su $n$. Il caso $n = 1$ è ovviamente molto facile: la matrice è $A = (a)$ e scriviamo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(a - \lambda) = a - \lambda = -\lambda + a.$$

Otteniamo un polinomio di grado 1 con i coefficienti giusti (qui $\det A = \mathrm{tr}A = a$). Anche se non è necessario per il passaggio induttivo, è comunque istruttivo esaminare anche il caso $n = 2$, in cui $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A. \end{aligned}$$

Dimostriamo adesso il passaggio induttivo: supponiamo la proposizione vera per $n-1$ e la verifichiamo per $n$. Scriviamo $A$ come $(a_{ij})$ e calcoliamo

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna otteniamo

$$p_A(t) = (a_{11}-\lambda)\det\begin{pmatrix} a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + q(\lambda).$$

Il termine $q(\lambda)$ è ottenuto continuando lo sviluppo di Laplace: il termine $j$-esimo dello sviluppo è calcolato cancellando la prima colonna e la $j$-esima riga di $A$; quando $j \geq 2$ cancelliamo due caselle diverse contenenti un $\lambda$, quindi le caselle rimanenti che contengono $\lambda$ sono $n-2$. Iterando lo sviluppo si deduce facilmente che $q(\lambda)$ è un polinomio di grado $\leq n-2$.

Possiamo adesso usare l'ipotesi induttiva sulla matrice di taglia $n-1$ presente nel primo termine dello sviluppo di Laplace e dedurre che

$$\begin{aligned} p_A(t) &= (a_{11}-\lambda)((-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}(a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-2}+\ldots)+\ldots \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots \end{aligned}$$

Resta solo da dimostrare che il termine noto $a_0$ è il determinante di $A$. Per fare ciò ricordiamo che $a_0 = p_A(0)$ e scriviamo semplicemente

$$a_0 = p_A(0) = \det(A - 0I) = \det A.$$

La dimostrazione è completa. □

Il polinomio caratteristico ci sarà utile per il motivo seguente. Gli autovalori ed autovettori di una matrice quadrata $A$ sono per definizione quelli dell'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Proposizione 1.2.6. *Gli autovalori di $A$ sono precisamente le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$.*

Dimostrazione. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore per $A$ se e solo se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $Av = \lambda v$. I fatti seguenti sono tutti equivalenti:

$$\begin{aligned} &\exists v \neq 0 \text{ tale che } Av = \lambda v \iff \\ &\exists v \neq 0 \text{ tale che } Av - \lambda v = 0 \iff \\ &\exists v \neq 0 \text{ tale che } (A-\lambda I)v = 0 \iff \\ &\exists v \neq 0 \text{ tale che } v \in \ker(A-\lambda I) \iff \\ &\det(A-\lambda I) = 0 \iff p_A(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. □

Abbiamo scoperto come possiamo identificare gli autovalori di $A$: dobbiamo solo (si fa per dire...) trovare le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$. Questo ovviamente non è un problema semplice in generale: purtroppo non esiste una formula per trovare le radici di un polinomio di grado qualsiasi.

Esempio 1.2.7. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Le sue radici sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$. Quindi gli autovalori di $A$ sono 1 e 3. Per ciascun autovalore $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$, i suoi autovettori sono precisamente le soluzioni non banali dei sistemi rispettivamente $Av = v$ e $Av = 3v$. Risolvendo i sistemi, troviamo ad esempio due autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Effettivamente $Av_1 = v_1$ e $Av_2 = 3v_2$. I due vettori sono indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^2$. La matrice $A$ è quindi diagonalizzabile, ed è simile alla matrice $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Esempio 1.2.8. Consideriamo una rotazione $\mathrm{Rot}_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ antioraria di un angolo $\theta \neq 0, \pi$. La rotazione è descritta dalla matrice

$$\mathrm{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il caso $\theta \neq 0, \pi$. In questo caso, è chiaro geometricamente che $\mathrm{Rot}_\theta$ non ha autovettori: ciascun vettore non banale $v$ è ruotato di un angolo $\theta \neq 0, \pi$ e quindi non può diventare un multiplo $\lambda v$ di se stesso.

Possiamo verificare che non ci sono autovettori anche guardando il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1$ e notando che ha due radici complesse non reali, perché $\Delta = \cos^2\theta - 1 < 0$. Il polinomio caratteristico non ha radici reali: quindi non ci sono autovalori, e di conseguenza neppure autovettori.

Il prossimo esempio mostra come la diagonalizzabilità di una matrice $A$ dipenda dal campo $\mathbb{K}$ che stiamo considerando!

Esempio 1.2.9. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rappresenta una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ e quindi sappiamo già che non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Se però la consideriamo come matrice su $\mathbb{C}$, le cose cambiano: il polinomio caratteristico è infatti $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ ed ha soluzioni $\lambda = \pm i$. Studiando i sistemi $Av = iv$ e $Av = -iv$ troviamo che i vettori seguenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori con autovalori $i$ e $-i$ rispettivamente. Quindi la matrice $A$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, ma lo è su $\mathbb{C}$. Prendendo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ otteniamo

$$[L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.2.10. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Il polinomio ha una radice $\lambda = 1$ con molteplicità due. Quindi $\lambda = 1$ è l'unico autovalore. Risolvendo il sistema $Av = v$ si trova facilmente che gli autovettori sono i multipli di $v = (1, 0)$. La matrice $A$ non è diagonalizzabile perché questi vettori non sono sufficienti per generare $\mathbb{R}^2$. Troviamo un autovettore, ma non ne troviamo due indipendenti. Lo stesso ragionamento mostra che questa matrice non è diagonalizzabile neppure su $\mathbb{C}$.

Esercizio 1.2.11. Per ciascuna delle matrici seguenti, determinare autovalori e autovettori in $\mathbb{R}^3$ e dire se è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $T: V \to V$ è un endomorfismo, possiamo comunque definire il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ come il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ di una qualsiasi matrice associata $A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. Questa definizione ha senso, perché due matrici associate diverse sono sempre simili, e la proposizione seguente ci dice che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico:

Proposizione 1.2.12. *Se $A$ e $B$ sono matrici simili, allora $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $A = M^{-1}BM$ per qualche matrice invertibile $M$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(M^{-1}BM - M^{-1}\lambda IM) \\ &= \det(M^{-1}(B - \lambda I)M) = \det(M^{-1})\det(B - \lambda I)\det M \\ &= \det(B - \lambda I) = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

grazie al teorema di Binet. □

**1.2.3. Matrici triangolari.** Ricordiamo che una matrice quadrata $A$ è *triangolare* se è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

In altre parole, vale $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$. Il determinante di una matrice triangolare $A$ è particolarmente semplice da calcolare: usando lo sviluppo di Laplace si verifica che

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Anche gli autovalori si determinano immediatamente:

Proposizione 1.2.13. *Gli autovalori di una matrice triangolare $A$ sono gli elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sulla diagonale.*

Dimostrazione. Vale

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

Le radici di $p_A$ sono quindi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. □

Notiamo che gli elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ possono anche ripetersi.

**1.2.4. Matrici a blocchi.** Ricordiamo il seguente esercizio. Indichiamo con $M(n)$ lo spazio delle matrici quadrate $n \times n$, sul campo base $\mathbb{K}$.

Esercizio 1.2.14. Sia $A \in M(n)$ del tipo

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con $B \in M(k)$ e $D \in M(n-k)$ per qualche $k$. Valgono le relazioni

$$\det A = \det B \cdot \det D,$$
$$\text{rk}A \geq \text{rk}B + \text{rk}D.$$

Ne ricaviamo una relazione analoga per il polinomio caratteristico.

Corollario 1.2.15. *Sia $A \in M(n)$ del tipo*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

*con $B \in M(k)$ e $D \in M(n-k)$ per qualche $k$. Vale la relazione*

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \cdot p_D(\lambda).$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} B - \lambda I & C \\ 0 & D - \lambda I \end{pmatrix}$$
$$= \det(B - \lambda I) \cdot \det(D - \lambda I) = p_B(\lambda) \cdot p_D(\lambda).$$

La dimostrazione è completa. □

## 1.3. Teorema di diagonalizzabilità

Lo scopo di questa sezione è la definizione di un criterio di diagonalizzabilità per le matrici quadrate. Iniziamo mostrando una proprietà algebrica degli autovettori.

**1.3.1. Autovettori con autovalori distinti.** Sia $T : V \to V$ un endomorfismo qualsiasi.

Proposizione 1.3.1. *Se $v_1, \ldots, v_k \in V$ sono autovettori per $T$ con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ distinti, allora sono indipendenti.*

Dimostrazione. Lo dimostriamo per induzione su $k$. Se $k = 1$, il vettore $v_1$ è indipendente semplicemente perché non è nullo (per definizione, un autovettore non è mai nullo).

Diamo per buono il caso $k-1$ e mostriamo il caso $k$. Supponiamo di avere una combinazione lineare nulla

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0. \tag{1}$$

Dobbiamo dimostrare che $\alpha_i = 0$ per ogni $i$. Applicando $T$ otteniamo

$$0 = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k. \tag{2}$$

Moltiplicando l'equazione (1) per $\lambda_k$ ricaviamo

$$\alpha_1 \lambda_k v_1 + \ldots \alpha_k \lambda_k v_k = 0$$

e sottraendo questa equazione dalla (2) deduciamo che

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = 0.$$

Questa è una combinazione lineare nulla di $k-1$ autovettori con autovalori distinti: per l'ipotesi induttiva tutti i coefficienti $\alpha_i(\lambda_k - \lambda_i)$ devono essere nulli. Poiché $\lambda_i \neq \lambda_k$, ne deduciamo che $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, k-1$ e usando (1) otteniamo anche $\alpha_k = 0$. La dimostrazione è completa. □

Corollario 1.3.2. *Se $p_T(\lambda)$ ha $n$ radici reali distinte, l'endomorfismo $T$ è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Le radici sono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e ciascun $\lambda_i$ è autovalore di qualche autovettore $v_i$. Gli autovettori $v_1, \ldots, v_n$ sono indipendenti per la Proposizione 1.3.1, quindi sono una base di $V$. Quindi $V$ ha una base formata da autovettori, cioè è diagonalizzabile. □

Il teorema di diagonalizzabilità che vogliamo dimostrare sarà una generalizzazione di questo corollario. Per enunciare questo teorema dobbiamo introdurre ancora una nozione.

**1.3.2. Autospazio.** Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Per ogni autovalore $\lambda$ di $T$ definiamo l'*autospazio* $V_\lambda \subset V$ nel modo seguente:

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}.$$

In altre parole, $V_\lambda$ consiste precisamente di tutti gli autovettori $v$ con autovalore $\lambda$, più l'origine $0 \in V$ (ricordiamo che $0 \in V$ non è mai autovettore per definizione).

Ricordiamo l'endomorfismo identità $\mathrm{id}\colon V \to V$, definito semplicemente da $\mathrm{id}(v) = v$. Per ogni autovalore $\lambda$ di $T$, ha senso considerare l'endomorfismo $T - \lambda\mathrm{id}$ e la proposizione seguente lo mette in relazione con $V_\lambda$.

Proposizione 1.3.3. *Vale*

$$V_\lambda = \ker(T - \lambda\mathrm{id}).$$

Dimostrazione. Otteniamo

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \big\{v \in V \bigm| T(v) = \lambda v\big\} = \big\{v \in V \bigm| T(v) - \lambda v = 0\big\} \\ &= \big\{v \in V \bigm| (T - \lambda\mathrm{id})v = 0\big\} = \ker(T - \lambda\mathrm{id}). \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa. □

Ne deduciamo in particolare che l'autospazio $V_\lambda \subset V$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

**1.3.3. Molteplicità algebrica e geometrica.** Per enunciare il teorema di diagonalizzabilità abbiamo bisogno di introdurre ancora due definizioni.

Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo e $\lambda$ sia un autovalore per $T$. La *molteplicità algebrica* $m_a(\lambda)$ è la molteplicità di $\lambda$ come radice del polinomio caratteristico $p_T$. La *molteplicità geometrica* $m_g(\lambda)$ è la dimensione del sottospazio associato a $\lambda$, cioè

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda.$$

Esempio 1.3.4. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo dato da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Troviamo un solo autovalore $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$. D'altra parte,

$$m_g(1) = \dim V_1 = \dim\ker(A - I) = \dim\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Abbiamo quindi trovato in questo caso

$$m_a(1) = 2, \qquad m_g(1) = 1.$$

In particolare vediamo che le due molteplicità non sono sempre uguali.

**1.3.4. Teorema di diagonalizzabilità.** Possiamo finalmente enunciare e dimostrare il teorema seguente.

Teorema 1.3.5 (Teorema di diagonalizzabilità). *Un endomorfismo $T\colon V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se valgono entrambi i fatti seguenti:*

(1) *il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ ha tutte le radici nel campo $\mathbb{K}$;*
(2) *$m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore $\lambda$.*

Dimostrazione. Se $T$ è diagonalizzabile, esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ formata da autovettori, con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prendiamo la matrice associata $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e notiamo che è diagonale: da questo fatto segue che $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ e quindi il polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{K}$. Usando la matrice $A$, si verifica anche che $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, e questo fatto è lasciato come esercizio. Quindi otteniamo sia (1) che (2).

D'altra parte, supponiamo che valgano (1) e (2) e dimostriamo adesso che $T$ è diagonalizzabile. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori. Sia $n = \dim V$. Da (1) segue che

$$m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_k) = n.$$

Da (2) deduciamo anche che

$$m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_k) = n.$$

Sia $\mathcal{B}^i$ una base dell'autospazio $V_{\lambda_i}$, per ogni $i = 1, \ldots, k$. Vogliamo dimostrare adesso che

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}^k$$

è una base per $V$. Questo conclude la dimostrazione, perché $\mathcal{B}$ è fatta di autovettori: l'endomorfismo $T$ ha una base $\mathcal{B}$ di autovettori e quindi è diagonalizzabile per definizione.

Indichiamo per semplicità $m_i = m_g(\lambda_i)$. Notiamo che la base $\mathcal{B}^i$ contiene precisamente $m_i = \dim V_{\lambda_i}$ elementi. Ne segue che $\mathcal{B}$ contiene precisamente $m_1 + \ldots + m_k = n = \dim V$ elementi. Quindi per dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base, è sufficiente verificare che gli $n$ elementi in $\mathcal{B}$ sono indipendenti. Scriviamo

$$\mathcal{B}^i = \left\{v_1^i, \ldots, v_{m_i}^i\right\}$$

per ogni $i = 1, \ldots k$. Supponiamo di avere una combinazione lineare nulla fra i vettori di $\mathcal{B}$, del tipo

$$\alpha_1^1 v_1^1 + \ldots + \alpha_{m_1}^1 v_{m_1}^1 + \ldots + \alpha_1^k v_1^k + \ldots + \alpha_{m_k}^k v_{m_k}^k = 0. \tag{3}$$

Il vettore

$$w_i = \alpha_1^i v_1^i + \ldots + \alpha_{n_i}^i v_{n_i}^i$$

appartiene a $V_{\lambda_i}$. Possiamo riscrivere l'equazione (3) nel modo seguente:

$$w_1 + \ldots + w_k = 0.$$

Per ciascun $w_i$, ci sono due possibilità: o $w_i = 0$, oppure $w_i$ è un autovettore con autovalore $\lambda_i$. Il secondo caso non può però accadere: altrimenti l'equazione $w_1 + \ldots + w_k = 0$ fornirebbe una combinazione lineare nulla fra autovettori con autovalori distinti, ma questo è proibito per la Proposizione 1.3.1. Otteniamo quindi

$$w_1 = \ldots = w_k = 0.$$

Allora per ogni $i = 1, \ldots, k$ otteniamo

$$\alpha_1^i v_1^i + \ldots + \alpha_{n_i}^i v_{n_i}^i = 0.$$

I vettori $v^i_1, \dots, v^i_{n_i}$ formano la base $\mathcal{B}_i$ e quindi sono indipendenti: allora necessariamente $\alpha^i_j = 0$ per ogni $i, j$. Quindi i coefficienti della combinazione lineare originale (3) sono tutti nulli e abbiamo dimostrato (con un po' di fatica...) che i vettori di $\mathcal{B}$ sono indipendenti. $\square$